Agrégation de mathématiques

Composition d'analyse 1984

NOTATIONS.

Dans tout le problème, Ω désignera un *ouvert borné connexe* non vide de $\mathbb{R}^2$, dont la frontière $\partial\Omega$ est une courbe C^∞ par morceaux. On notera $x = (x_1, x_2)$ les points de $\mathbb{R}^2$. On rappelle que l'*opérateur de Laplace* (ou laplacien)

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2}$$

s'écrit en coordonnées polaires (r, θ), et pour $r \neq 0$, sous la forme

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial \theta^2}.$$

On note $L^1_{\text{loc}}(\Omega)$ l'ensemble des classes de fonctions mesurables, *à valeurs réelles*, qui sont intégrables (pour la mesure de Lebesgue dx) dans tout ouvert Ω' relativement compact dans $\Omega(\bar{\Omega}' \subset \Omega)$; on a $L^2(\Omega) \subset L^1_{\text{loc}}(\Omega)$.

On désigne par $C_0^k(\Omega)$, $0 \leqslant k \leqslant \infty$, l'ensemble des fonctions réelles définies sur Ω, de classe C^k et à support compact dans Ω. On note supp (f) le support de la fonction f. On rappelle que $C_0^k(\Omega)$ est dense dans $L^1(\Omega)$ pour $0 \leqslant k \leqslant \infty$. On utilisera de même les notations $L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^2)$, $C_0^k(\mathbb{R}^2)$,...

Soit a une constante réelle; on dit qu'une fonction u de $L^1_{\text{loc}}(\Omega)$ est une *solution faible* de l'équation $(\Delta + a)u = 0$ dans Ω (ou encore qu'elle vérifie $(\Delta + a)u = 0$ au sens faible dans Ω) si, pour toute fonction φ de $C_0^\infty(\Omega)$, on a

$$\int_\Omega u(x)(\Delta\varphi(x) + a\varphi(x))\, dx = 0.$$

Si u est dans $C^2(\Omega)$, et si $\Delta u(x) + au(x) = 0$ pour tout x de Ω, on dira que u est une *solution classique* de l'équation $(\Delta + a)u = 0$ dans Ω. On notera $\nabla u(x)$ le vecteur (gradient de u)

$$\nabla u(x) = \left(\frac{\partial u}{\partial x_1}(x), \frac{\partial u}{\partial x_2}(x)\right).$$

On pose aussi $\|x\| = (x_1^2 + x_2^2)^{1/2}$, $B(x_0, R) = \{x \in \mathbb{R}^2, \|x - x_0\| < R\}$,

$$S(x_0, R) = \{x \in \mathbb{R}^2, \|x - x_0\| = R\} \quad \text{et} \quad \bar{B}(x_0, R) = \{x \in \mathbb{R}^2, \|x - x_0\| \leqslant R\} \quad (\text{où } R > 0).$$

On rappelle enfin les notations suivantes :

- pour $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2) \in \mathbb{N}^2$, $|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2$, $\alpha_1! = \alpha_1!\,\alpha_2!$,
- pour tout $x \in \mathbb{R}^2$, $x^\alpha = x_1^{\alpha_1}x_2^{\alpha_2}$ et $\partial^\alpha u(x) = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right)^{\alpha_1}\left(\frac{\partial}{\partial x_2}\right)^{\alpha_2} u(x)$.

BUT DU PROBLÈME.

Ce problème étudie certaines propriétés des solutions (quand elles existent) de l'équation $(\Delta + a)u = 0$ dans Ω. Dans la première partie, on étudie les propriétés de régularité dans Ω des solutions faibles éventuelles de $(\Delta + a)u = 0$. Dans la deuxième partie, on étudie la géométrie locale de l'ensemble $u^{-1}(0)$ où u est une solution faible d'une équation $(\Delta + a)u = 0$. La troisième partie est consacrée à la recherche de couples $(a, u) \in \mathbb{R} \times H$ tels que u soit une solution faible de l'équation $(\Delta + a)u = 0\,(u \not\equiv 0)$, où H est un certain espace de fonctions. La quatrième partie est une partie de synthèse où l'on étudie des propriétés géométriques semi-globales de l'ensemble $u^{-1}(0)$, où u est une solution faible d'une équation $(\Delta + a)u = 0$.

NOTA. — *Les trois premières parties du problème peuvent être traitées indépendamment les unes des autres* (quitte à admettre certains résultats).

PREMIÈRE PARTIE.

1° *a*) Montrer que la somme J(z) de la série $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{z^{2n}}{4^n(n!)^2}$ est une fonction entière de la variable complexe z et qu'elle vérifie l'équation différentielle

(1) $$zf''(z) + f'(z) + zf(z) = 0$$

où $'$ désigne la dérivation par rapport à la variable complexe z.

1° *b*) Montrer que la fonction J(s), obtenue par restriction à $\mathbb{R}$ de la fonction du 1° *a*), a un et un seul zéro réel, noté j_0, entre 0 et $\sqrt{8}$ (on pourra situer ce zéro par rapport à 2).

1° *c*) Soit $R > 0$. Montrer que la fonction de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ définie par

$$e(x) = e(x_1, x_2) = J\left(\frac{j_0}{R}\sqrt{x_1^2 + x_2^2}\right)$$

est C^∞ dans $\mathbb{R}^2$ et qu'elle vérifie $\left(\Delta + \frac{j_0^2}{R^2}\right)e(x) = 0$, $e(x) = 0$ si $x \in S(O, R)$ et $e(x) > 0$ si $x \in B(O, R)$.

2° Soit $\mathbb{C}_0 = \{z \in \mathbb{C},\ z \notin \mathbb{R}_-\}$. On désigne par Log (z) la détermination principale du logarithme dans $\mathbb{C}_0$.

2° *a*) Montrer que la fonction

$$Y(z) = \operatorname{Log}(z)J(z) - \sum_{n=1}^{\infty}\left(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}\right)(-1)^n \frac{z^{2n}}{4^n(n!)^2}$$

est définie et holomorphe sur $\mathbb{C}_0$ et qu'elle y vérifie l'équation différentielle (1) du 1° *a*).

2° *b*) Établir que $\lim zY(z) = 0$ et $\lim zY'(z) = 1$, où les limites sont prises pour $z \in \mathbb{C}_0$, z tendant vers 0.

3° Soit $k > 0$ un réel fixé. On pose

$$E_k(x) = E_k(x_1, x_2) = \frac{1}{2\pi} Y(k\sqrt{x_1^2 + x_2^2}).$$

3° *a*) Montrer que E_k est une fonction C^∞ dans $\mathbb{R}^2\backslash\{0\}$ et qu'elle y vérifie $(\Delta + k^2)E_k(x) = 0$.

3° *b*) Pour $z = (z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2$, on pose $z = (x_1 + iy_1, x_2 + iy_2)$,

$$\mathscr{R}(z) = (x_1^2 + x_2^2)^{1/2}, \qquad \mathscr{I}(z) = (y_1^2 + y_2^2)^{1/2} \qquad \text{et} \qquad |z|^2 = |z_1|^2 + |z_2|^2 = \mathscr{R}(z)^2 + \mathscr{I}(z)^2.$$

Soit U le voisinage de $\mathbb{R}^2\backslash\{0\}$ dans $\mathbb{C}^2$ défini par $U = \{z \in \mathbb{C}^2 : \mathscr{I}(z) < \mathscr{R}(z)\}$.

Montrer que E_k peut se prolonger en une fonction, encore notée E_k, de U dans $\mathbb{C}$ qui soit continue sur U et séparément holomorphe en chacune des variables z_1, z_2 sur U [c'est-à-dire : pour z_1 (resp. z_2) fixé, la fonction $z_2 \mapsto E_k(z_1, z_2)$ (resp. $z_1 \mapsto E_k(z_1, z_2)$ est holomorphe dans l'ouvert $\{z_2 \in \mathbb{C} : (z_1, z_2) \in U\}$ (resp. $\{z_1 \in \mathbb{C} : (z_1, z_2) \in U\}$].

4° Pour ψ dans $L^1_{loc}(\mathbb{R}^2)$ et φ dans $C_0^\infty(\mathbb{R}^2)$, on pose $(\psi * \varphi)(x) = \int_{\mathbb{R}^2} \psi(y)\varphi(x - y)\,dy$ où dy est la mesure de Lebesgue dans $\mathbb{R}^2$.

4° *a*) Montrer que E_k est dans $L^1_{loc}(\mathbb{R}^2)$ et que pour toute φ dans $C_0^\infty(\mathbb{R}^2)$, $E_k * \varphi$ est C^∞ dans $\mathbb{R}^2$.

4° *b*) Montrer que pour toute φ de $C_0^\infty(\mathbb{R}^2)$ et pour tout x de $\mathbb{R}^2$, on a

$$(\Delta + k^2)(E_k * \varphi)(x) = (E_k * (\Delta + k^2)\varphi)(x) = \varphi(x).$$

(On pourra se ramener au cas $x = 0$; intégrer sur un domaine $|x| \geqslant \varepsilon$, passer en polaires et intégrer par parties.)

5° Le nombre k étant fixé, on pose, pour simplifier, $E = E_k$ et $P = \Delta + k^2$. Soit u dans $L^1_{loc}(\Omega)$ une solution faible de l'équation $Pu = 0$ dans Ω. On se donne x_0 dans Ω et $R > 0$ tels que le disque $\bar{B}(x_0, 2R)$ soit contenu dans Ω. Soit α dans $C_0^\infty(\Omega)$ identiquement égale à 1 sur $B(x_0, 2R)$. Soit β dans $C_0^\infty(B(0, 2\varepsilon))$ une fonction *paire* telle que β soit identiquement égale à 1 sur $B(0, \varepsilon)$ où l'on choisit ε tel que $2\varepsilon < R$ [*on admettra* l'existence de telles fonctions α et β]. On pose enfin $F_1 = \beta E$ et $F_2 = (1 - \beta)E$.

5° *a*) Montrer que F_1 est dans $C^\infty(\mathbb{R}^2\backslash\{0\})$ et dans $L^1_{loc}(\mathbb{R}^2)$, et qu'elle est nulle en dehors d'un compact de $\mathbb{R}^2$; montrer que F_2 est dans $C^\infty(\mathbb{R}^2)$

5° *b*) Montrer que pour toute φ de $C_0^\infty(\Omega)$, avec supp $\varphi \subset B(x_0, R)$, on a

$$\int_\Omega u(x)\varphi(x)\,dx = \int_\Omega \alpha(x)u(x)P(F_1 * \varphi)(x)\,dx + \int_\Omega \alpha(x)u(x)P(F_2 * \varphi)(x)\,dx.$$

On choisit maintenant φ *comme ci-dessus, c'est-à-dire* $\varphi \in C_0^\infty(B(x_0, R))$.

5° *c*) Montrer que supp $(F_1 * \varphi) \subset B(x_0, 2R)$ et que

$$\int_\Omega \alpha(x)u(x)P(F_1 * \varphi)(x)\,dx = 0.$$

5° *d*) Montrer que $\int_\Omega u(x)\varphi(x)\,dx = \int_\Omega [(\alpha u) * PF_2](x)\varphi(x)\,dx$; en déduire que u est dans $C^\infty(B(x_0, R))$. En conclure que toute solution faible u de $Pu = 0$ dans Ω est C^∞ dans Ω (c'est-à-dire u est égale presque partout à une fonction C^∞ encore notée u), et que $Pu = 0$ au sens classique.

6° *On reprend les notations du* 5°. On se propose de démontrer que u est analytique en la variable (x_1, x_2) dans Ω, c'est-à-dire pour tout $x_0 = (x_1^0, x_2^0)$ de Ω, il existe $R > 0$ tel que si $|x_1 - x_1^0| < R$ et $|x_2 - x_2^0| < R$ alors,

$$u(x_1, x_2) = \sum_{p,q \geqslant 0} a_{pq}(x_1 - x_1^0)^p(x_2 - x_2^0)^q.$$

6° *a*) On pose $v = P(\alpha u)$. Pour $x \in B(x_0, R)$, montrer que

$$u(x) = \int_\Omega E(x - y)v(y)\,dy$$

et en déduire que l'on a alors

$$u(x) = \int_{\mathbb{R}^2 \setminus B(x_0, 2R)} E(x - y)v(y)\,dy$$

pour tout $x \in B(x_0, R)$.

6° *b*) Avec les notations du 3° *b*), et en se ramenant au cas $x_0 = 0$, montrer que la formule

$$u(z) = \int_{|y| \geqslant 2R} E(z - y)v(y)\,dy,$$

prolonge à l'ouvert V de $\mathbb{C}^2$, défini par $V = \{z \in \mathbb{C}^2 : \mathscr{R}(z) < R \text{ et } \mathscr{I}(z) < R\}$, la fonction $u(x)$ en une fonction, encore notée u, continue sur V et séparément holomorphe en (z_1, z_2) dans V.

6° *c*) Toujours avec l'hypothèse $x_0 = 0$, montrer qu'il existe des nombres r_j, R_j, $j = 1,2$ tels que pour $|z_j| < r_j < R_j$ on ait

$$u(z_1 z_2) = \left(\frac{1}{2i\pi}\right)^2 \int_{|\zeta_1| = r_1} \int_{|\zeta_2| = r_2} \frac{u(\zeta_1, \zeta_2)}{(\zeta_1 - z_1)(\zeta_2 - z_2)}\,d\zeta_1\,d\zeta_2$$

et que

$$u(z_1, z_2) = \sum_{p,q \geqslant 0} a_{p,q} z_1^p z_2^q.$$

En conclure qu'une solution faible u de l'équation $Pu = 0$ dans Ω y est analytique.

Deuxième partie.

Dans toute cette partie, λ *est un réel positif ou nul et* $u \in L^1_{loc}(\Omega)$ *est une solution faible de* $(\Delta + \lambda)u = 0$ *dans* Ω, *c'est-à-dire pour toute* φ *de* $C_0^\infty(\Omega)$, *on a*

$$\int_\Omega u(x)(\Delta\varphi(x) + \lambda\varphi(x))\,dx = 0.$$

On dit qu'une fonction C^∞ v *s'annule à l'ordre* k, $0 \leqslant k \leqslant +\infty$ en x_0 si toutes les dérivées d'ordre inférieur ou égal à k de v s'annulent en x_0 et si au moins une dérivée de v d'ordre $(k + 1)$ ne s'annule pas en x_0.

Dans cette partie, on utilise les résultats de régularité établis dans la première partie (**I.5° *d***) et **I.6° *c***)).

1° *a*) Montrer que la fonction u ne peut pas s'annuler à l'ordre infini en un point x_0 de Ω sans être identiquement nulle.

1° *b*) Montrer que si la fonction u s'annule à l'ordre $(k - 1)$ en $x_0 \in \Omega$, et si on pose

$$u_k(x) = \sum_{|\alpha| = k} \partial^\alpha u(x_0) \frac{(x - x_0)^\alpha}{\alpha!}$$

(premier terme homogène non nul du développement de Taylor en x_0) alors $\Delta u_k = 0$ dans $\mathbb{R}^2$.

On suppose maintenant que u *s'annule à l'ordre* $(k - 1)$ *en* $x_0 \in \Omega$, $k \geqslant 1$.

2° *a*) Montrer, en utilisant le fait que le polynôme u_k est une fonction harmonique dans $\mathbb{R}^2$, qu'il existe une constante complexe ζ telle que l'on ait

$$u_k(x_1, x_2) = \mathrm{Re}\,[\zeta(z - z_0)^k] \qquad \text{où} \qquad z = x_1 + ix_2,\ z_0 = x_1^0 + ix_2^0.$$

2° *b*) En déduire l'existence de constantes strictement positives K_1 et K_2 telles que

$$|u(x)| \leqslant K_1\|x - x_0\|^k \qquad \text{et} \qquad \|\nabla u(x)\| \geqslant K_2\|x - x_0\|^{k-1}$$

au voisinage de x_0, où

$$\nabla u(x) = \left(\frac{\partial u}{\partial x_1}(x), \frac{\partial u}{\partial x_2}(x)\right) \qquad \text{et} \qquad \|(x_1, x_2)\| = (x_1^2 + x_2^2)^{1/2}.$$

2° *c*) Montrer que les points x tels que $u(x) = 0$ et $\nabla u(x) = 0$ sont isolés dans Ω.

3° Soit $x_0 \in \Omega$ un point où $u(x_0) = 0$ et soit $(k - 1)$ l'ordre d'annulation de u en x_0. On écrit $u(x) = u_k(x) + v(x)$ avec les notations du **1° *b*)**.

3° *a*) Montrer, en se ramenant au cas $x_0 = 0$ et en choisissant bien les coordonnées, que l'on peut écrire :

$$u_k(x_1, x_2) = (x_2 - \alpha_1 x_1)(x_2 - \alpha_2 x_1)\ldots(x_2 - \alpha_k x_1)$$

où les constantes $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ sont réelles, distinctes.

Montrer que les k droites ainsi obtenues forment un système équiangulaire (c'est-à-dire l'angle de deux droites consécutives est constant et égal à π/k).

3° *b*) (i) Montrer que l'application $\varphi : (x_1, t) \mapsto (x_1, x_2)$ avec $x_2 = tx_1$ est C^∞ sur $\mathbb{R}^2$ et que c'est un difféomorphisme du demi-plan $\{x_1 > 0\}$ (resp. $\{x_1 < 0\}$) sur lui-même.

ii) Montrer qu'il existe un voisinage de 0, de la forme $D = \{|x_1| < R, |tx_1| < R\}$ et une fonction $f(x_1, t)$, que l'on cherchera comme somme d'une série entière sur D, tels que

$$u \circ \varphi(x_1, t) = x_1^k f(x_1, t).$$

Montrer que $f(0, \alpha_j) = 0$ et $\dfrac{\partial f}{\partial t}(0, \alpha_j) \neq 0$ pour $j = 1, \ldots, k$. En déduire qu'il existe $\varepsilon > 0$ et des fonctions $g_1, \ldots, g_k$, C^∞ sur $]-\varepsilon, \varepsilon[$, telles que pour $|x_1| < \varepsilon$, $f(x_1, t) = 0$ soit équivalent à $t = g_1(x_1)$, ou $t = g_2(x_1)$, ou..., ou $t = g_k(x_1)$.

(iii) Montrer que dans $0 < x_1 < \varepsilon$ (resp. $-\varepsilon < x_1 < 0$), on a $u(x_1, x_2) = 0$ si, et seulement si, $x_2 = x_1 g_1(x_1)$ ou... ou $x_2 = x_1 g_k(x_1)$. En déduire que $u^{-1}(0)$ est constitué, près de 0, de k branches de courbes C^1, dont les tangentes en O forment un système équiangulaire.

3° *c*) Montrer que si $u(x_0) = 0$, alors u change nécessairement de signe au voisinage de x_0.

Troisième partie.

On rappelle que Ω est un ouvert borné connexe de $\mathbb{R}^2$. Sur l'espace $U(\Omega) = C_0^\infty(\Omega)$ des fonctions à valeurs réelles, C^∞, à support compact dans Ω, on introduit les deux produits suivants, ainsi que les normes associées : pour $u, v \in U(\Omega)$,

$$(u, v)_0 = \int_\Omega u(x)v(x)\,dx \qquad \text{et} \qquad \|u\|_0 = (u, u)_0^{1/2}$$

$$(u, v)_1 = \int_\Omega u(x)v(x)\,dx + \int_\Omega \nabla u(x).\nabla v(x)\,dx \qquad \text{et} \qquad \|u\|_1 = (u, u)_1^{1/2}$$

où dx est la mesure de Lebesgue et où $\nabla u(x).\nabla v(x)$ désigne le produit scalaire des deux vecteurs $\nabla u(x)$ et $\nabla v(x)$.

On rappelle que $L(\Omega) = L^2(\Omega)$ est le complété de $U(\Omega)$ pour la norme $\|.\|_0$. On désignera par $H(\Omega)$ le complété de $U(\Omega)$, dans $L(\Omega)$, pour la norme $\|.\|_1$. On désignera par i l'inclusion continue de l'espace de Hilbert réel $(H(\Omega), (\bullet, \bullet)_1)$ dans l'espace de Hilbert réel $(L(\Omega), (\bullet, \bullet)_0)$. Étant donné un espace vectoriel E, on désignera par $E^\bullet$ l'ensemble $E^\bullet = E\setminus\{0_E\}$.

Pour $u \in H(\Omega)$, on pose $Q(u) = \|u\|_1^2 - \|u\|_0^2$ et on introduit, pour $u \in H^\bullet(\Omega)$, le quotient

$$R(u) = R_\Omega(u) = \frac{Q(u)}{\|u\|_0^2}.$$

On *admettra sans démonstration* le résultat suivant : l'inclusion $i : H(\Omega) \mapsto L(\Omega)$ est une application linéaire continue et compacte, c'est-à-dire l'image par i d'une partie bornée de $H(\Omega)$ pour la norme $\|.\|_1$ est relativement compacte dans $L(\Omega)$ pour la norme $\|.\|_0$.

Enfin, on notera pour simplifier U pour $U(\Omega), \ldots$ quand aucune confusion ne sera à craindre.

1° *a*) Montrer que les bornes inférieures $\inf\{R(u), u \in U^*\}$ et $\inf\{R(u), u \in H^*\}$ existent et sont égales; on note $\bar{\lambda}_1$ leur valeur commune.

1° *b*) Soit $\{u_n\}$ une suite faiblement convergente dans H. Montrer que la suite $\{i(u_n)\}$ de L est faiblement convergente dans L.

1° *c*) Montrer l'existence d'une suite $\{u_n\}$ de H^* telle que $\|u_n\|_1^2 \leqslant \bar{\lambda}_1 + 1 + \frac{1}{n}\cdot$ En déduire qu'il existe un élément u de H^* tel que pour tout φ de H on ait

$$(u, \varphi)_1^2 \leqslant (\bar{\lambda}_1 + 1)\|\varphi\|_1^2.$$

1° *d*) Montrer que u vérifie $R(u) = \bar{\lambda}_1$.

1° *e*) Montrer que $\{u \in H^* : R(u) = \bar{\lambda}_1\} \cup \{0\} = E_1$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie m_1.

2° Montrer, en utilisant les méthodes du 1°, que l'on peut construire trois suites :

$\bar{\lambda}_1 < \bar{\lambda}_2 < \bar{\lambda}_3 < \dots$, avec $\bar{\lambda}_i$ nombre réel positif ou nul,
$E_1, E_2, E_3, \dots$, avec E_i $\mathbb{R}$-sous-espace vectoriel de dimension finie de L,
$m_1, m_2, m_3, \dots$, avec $m_i = \dim E_i$,

avec en outre les deux propriétés suivantes :

(i) pour $i \neq j$, E_i et E_j sont orthogonaux dans $(L, (\bullet, \bullet)_0)$;

(ii) pour tout $u \in E_i$, pour tout $\varphi \in H$, on a $q(u, \varphi) = \bar{\lambda}_i(u, \varphi)_0$ où $q(u, v) = (u, v)_1 - (u, v)_0$ pour $u, v \in H$.

Dans la suite du problème, on écrira la suite $\{\bar{\lambda}_i, m_i)\}$ sous la forme d'une seule suite de nombres réels positifs ou nuls $\{\lambda_i\}$, $\lambda_1 \leqslant \lambda_2 \leqslant \lambda_3 \dots$, obtenue en répétant m_i fois chaque $\bar{\lambda}_i$; ainsi, si $m_1 = 1$, $m_2 = 2$ et $m_3 = 3$, on écrira $(\bar{\lambda}_1, 1)$, $(\bar{\lambda}_2, 2)$, $(\bar{\lambda}_3, 3)\dots$ sous la forme

$$\lambda_1 \leqslant \lambda_2 \leqslant \lambda_3 \leqslant \lambda_4 \leqslant \lambda_5 \leqslant \lambda_6 \dots \quad \text{avec} \quad \lambda_1 = \bar{\lambda}_1,\ \lambda_2 = \lambda_3 = \bar{\lambda}_2,\ \lambda_4 = \lambda_5 = \lambda_6 = \bar{\lambda}_3.$$

On dit que la suite $\{\lambda_i\}$ est la suite des *valeurs propres* (avec multiplicités) du laplacien Δ dans $H(\Omega)$ [la terminologie sera justifiée au 3° *c*)]. On appellera $\lambda_i(\lambda_i(\Omega)$ si on veut spécifier le domaine Ω) la $i^{\text{ième}}$ valeur propre de Δ dans $H(\Omega)$. L'*espace propre* associé sera l'espace vectoriel sur $\mathbb{R}$, de dimension finie, noté $E_{\lambda i}$, des u de $H(\Omega)$ tels que $q(u, \varphi) = \lambda_i(u, \varphi)_0$ pour tout élément φ de $H(\Omega)$. Si $\dim E_{\lambda i} = 1$, on dira que la valeur propre λ_i est *simple*.

3° *a*) Montrer qu'il existe une suite $\{e_i\}_{i \geqslant 1}$ d'éléments de H telle que :

(i) la famille $\{e_i\}$ est orthonormale dans L;

(ii) $R(e_i) = \lambda_i$, $i \geqslant 1$.

3° *b*) Montrer que la suite $\{\lambda_i\}$ tend vers $+\infty$ et que la famille $\{e_i\}$ est complète dans L.

3° *c*) Montrer que pour $i \geqslant 1$, e_i est une solution faible de l'équation $(\Delta + \lambda_i)u = 0$ dans Ω.

4° Soit $H_k = \{u \in H : (u, e_i)_0 = 0,\ 1 \leqslant i \leqslant k\}$. Pour un sous-espace vectoriel L_k de dimension k de H, $L_k^* = L_k \backslash \{0\}$, on pose $\alpha(L_k) = \sup\{R(v), v \in L_k^*\}$.
Enfin, on pose $\Lambda_k = \inf\{\alpha(L_k) : L_k$ sous-espace vectoriel de dimension k de $H\}$.

4° *a*) Montrer qu'étant donné $k \geqslant 1$, on peut trouver un vecteur non nul dans $L_k \cap H_{k-1}$. En déduire que $\Lambda_k \geqslant \lambda_k$.

4° *b*) Montrer que $\Lambda_k = \lambda_k$.

4° *c*) Soit Ω_1, Ω_2 deux ouverts bornés non vides de $\mathbb{R}^2$, avec $\Omega_1 \subset \Omega_2$. Comparer les valeurs propres $\lambda_i(\Omega_1)$ et $\lambda_i(\Omega_2)$ pour $i \geqslant 1$ fixé.

5° Soit A un ensemble dénombrable. Soient $\{\mu_\alpha\}_{\alpha \in A}$ une famille de réels positifs ou nuls et $\{f_\alpha\}_{\alpha \in A}$ une famille d'éléments de H qui soit orthonormée complète dans L et telles que, pour tout $\alpha \in A$ et tout φ de H $q(f_\alpha, \varphi) = \mu_\alpha(f_\alpha, \varphi)_0$. Montrer que les ensembles $\{\mu_\alpha : \alpha \in A\}$ et $\{\lambda_k, k \geqslant 1\}$ sont égaux.

6° Dans cette question, on pourra *utiliser sans démonstration* le *résultat suivant :* si la frontière $\partial\Omega$ de Ω est C^∞ par morceaux et si u, C^1 au voisinage de $\bar{\Omega}$, vérifie $u = 0$ sur $\partial\Omega$, alors $u \in H(\Omega)$.

Soit $\Omega_{a,b}$ le rectangle défini par $0 < x_1 < a$, $0 < x_2 < b$. On se propose de déterminer les valeurs propres du laplacien Δ dans $H(\Omega_{a,b})$. Pour cela, on cherche des couples $(u, \lambda) \in C^2(\bar{\Omega}_{a,b}) \times \mathbb{R}_+$, avec u nulle sur $\partial\Omega_{a,b}$, tels que

$$(*) \qquad (\Delta + \lambda)u = 0 \quad \text{dans } \Omega_{a,b}.$$

6° *a*) Montrer que la famille $(e_{m,n}, \lambda_{m,n})$, $m, n \in \mathbb{N}^*$, définie par

$$\lambda_{m,n} = \pi^2\left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2}\right), \qquad e_{m,n}(x_1, x_2) = \sin\frac{\pi m x_1}{a}\sin\frac{\pi n x_2}{b}$$

vérifie (*).

6° *b)* Montrer que la famille $\{e_{m,n}\}_{m,n\in\mathbb{N}^*}$ est complète dans $L^2(\Omega_{a,b})$ [on pourra se ramener par parité au cas des séries de Fourier].

6° *c)* Déduire de ce qui précède les valeurs propres du laplacien Δ dans $H(\Omega_{a,b})$.

6° *d)* Toutes les valeurs propres de $\Omega_{1,1}$ sont-elles simples ?

6° *e)* Donner un exemple de domaine du type $\Omega_{a,b}$ dont toutes les valeurs propres soient simples.

7° Montrer que l'on a $\lambda_1(\Omega) > 0$ pour tout ouvert borné Ω de $\mathbb{R}^2$.

Quatrième partie.

On rappelle que Ω est un ouvert borné connexe de $\mathbb{R}^2$. On reprend les notations qui suivent le **III.2°**.

Si λ est une valeur propre du laplacien Δ dans $H(\Omega)$, on note E_λ l'espace propre correspondant, que l'on peut considérer comme un sous-espace de $C^\infty(\Omega)$ à cause du **II**. Quand on écrira $u \in E_\lambda$, on *entendra implicitement* $E_\lambda \neq \{0\}$ (c'est-à-dire λ valeur propre de Δ) et $u \neq 0$.

Dans cette partie, on *admettra sans démonstration* les deux résultats suivants :

(i) Si $u \in E_{\lambda_1(\Omega)}$, alors u ne s'annule pas dans Ω;

(ii) Si $u \in E_\lambda$ et si Ω' est une composante connexe de $\Omega \backslash u^{-1}(0)$, alors $\lambda_1(\Omega') = \lambda$.

1° Montrer, en utilisant le résultat **(i)** ci-dessus, que l'on a toujours $\dim E_{\lambda_1(\Omega)} = 1$ et que si $\lambda > \lambda_1(\Omega)$ et $u \in E_\lambda$, alors u s'annule dans Ω.

2° *a)* Montrer que pour tout déplacement τ de $\mathbb{R}^2$, on a $\lambda_1(\tau(\Omega)) = \lambda_1(\Omega)$.

2° *b)* Montrer que pour tous x de $\mathbb{R}^2$ et $R > 0$, on a $\lambda_1(B(x, R)) = \dfrac{\lambda_1(B(0,1))}{R^2}$.

On suppose maintenant que $\lambda > \lambda_1(\Omega)$.

3° Soit $B(x, r)$ une boule contenue dans Ω. Montrer que si $r > \sqrt{\mu/\lambda}$, où $\mu = \lambda_1(B(0,1))$ et si $u \in E_\lambda$, alors $B(x, r) \cap u^{-1}(0) \neq \emptyset$.

Dans toute la suite du problème, on désigne par R un nombre réel strictement positif et par α un réel strictement positif petit par rapport à R, par exemple $\alpha = 10^{-10}$ R, tels qu'il existe un point x_0 de Ω pour lequel $B(x_0, R + \alpha) \subset \Omega$. *Le point* x_0 *et les nombres* R *et* α *sont choisis une fois pour toutes.*

4° *a)* Montrer qu'il existe un nombre $\lambda_0 > 0$ tel que si $\lambda \geqslant \lambda_0$ et si $u \in E_\lambda$, alors $B(x_0, R) \cap u^{-1}(0) \neq \emptyset$.

4° *b)* *On pose désormais* $r = 2\sqrt{\mu/\lambda}$ où $\mu = \lambda_1(B(0,1))$.
Montrer qu'il existe des valeurs propres λ de Δ dans $H(\Omega)$ telles que $\lambda \geqslant \lambda_0$, $2r < \alpha$. *On choisit une fois pour toutes* une telle valeur propre λ et une fonction $u \in E_\lambda^*$. Montrer qu'il existe une famille $B(x_i, r/2) i = 1, 2, \ldots, l$ de boules deux à deux disjointes, contenues dans Ω, de centres $x_i \in u^{-1}(0) \cap B(x_0, R - r)$ pour $1 \leqslant i \leqslant l$ et telles que

$$B(x_0, R - 2r) \subset \bigcup_{i=1}^{l} B(x_i, 2r).$$

4° *c)* Montrer qu'il existe une constante strictement positive C, qui ne dépend ni de Ω, ni de λ et telle que le nombre l de boules construites au **4° *b)*** vérifie $l \geqslant \dfrac{C}{r^2} \operatorname{Vol}(B(x_0, R))$, où Vol désigne l'aire.

5° Montrer que $u^{-1}(0) \cap B(x_0, R)$ est réunion d'un ensemble discret fini et d'une famille d'arcs C^1 de $\mathbb{R}^2$, de longueur totale finie.

6° Montrer qu'il ne peut pas exister de courbe *fermée*, C^1 par morceaux γ qui vérifie $\gamma \subset u^{-1}(0)$ et $\gamma \subset B(x_i, r/4)$ où $B(x_i, r/4)$ est une boule de rayon $r/4$ centrée en l'un des points x_i du **4° *b)***.

7° Montrer qu'il existe une constante strictement positive D, qui ne dépend ni de Ω, ni de λ et telle que la longueur de $u^{-1}(0) \cap B(x_0, R)$ vérifie

$$\operatorname{long}(u^{-1}(0) \cap B(x_0, R)) \geqslant D \operatorname{Vol}(B(x_0, R))\sqrt{\lambda}.$$

8° Peut-on remplacer l'ouvert $B(x_0, R)$ des questions précédentes par un ouvert ω plus général ?